

Journal of Cybernetics and Informatics

published by

**Slovak Society for
Cybernetics and Informatics**

Special Issue

**"New Trends in Education of Automation
and Information Technology"**

2004

**DISKRÉTNĚ RIADENIE SO ŠÍRKOVOU MODULÁCIOU IMPULZOV
S PREDPÍSANOU ZMENOU POLOHY A RÝCHLOSTI
Sovišová D., Oravec I., 87-93**

<http://www.sski.sk/casopis/index.php> (home page)

ISSN: 1336-4774

DISKRÉTNÉ RIADENIE SO ŠÍRKOVOU MODULÁCIOU IMPULZOV S PREDPÍSANOU ZMENOU POLOHY A RÝCHLOSTI

Sovišová, D., Oravec, I.

Katedra automatizácie a regulácie, Slovenská technická univerzita, Ilkovi čova 3, 81219 Bratislava, Slovakia
ivan.oravec@stuba.sk

Abstrakt: Tento príspevok sa zaoberá časovo suboptimálnym riadením rýdzoostatickej sústavy druhého rádu na princípe symetrickej šírkovej modulácie impulzov.

KLúčové slová: časovooptimálne riadenie, šírkovomodulovaná akčná veličina, rýdzoostatický systém druhého rádu.

1 ÚVOD

Riešenie úlohy optimálneho riadenia spočíva v stanovení takeého algoritmu riadenia, ktorý by dynamický systém riadil podľa vopred daných požiadaviek najlepším spôsobom. Aby bol algoritmus riadenia technicky realizovateľný, musia sa pri jeho návrhu uvažovať obmedzujúce podmienky, t.j. riadiaca i akčná veličina má svoju minimálnu i maximálnu hodnotu. Jedným zo základných typov optimálneho riadenia je časovo optimálne riadenie. Úlohou takehoto riadenia je zabezpečiť, aby systém z počiatočného stavu dosiahol cieľový stav za čo najkratší čas. Cieľom príspevku je navrhnúť algoritmus suboptimálneho riadenia so šírkovou moduláciou impulzov pre rýdzoostatickú sústavu 2. rádu.

2 OPIS SYSTÉMU

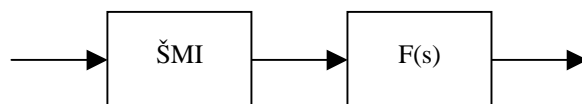
Daná je rýdzoostatická sústava 2. rádu:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \quad (1)$$

na vstupe je šírkovo modulovaný signál, ktorého správanie je opísané rovnicou:

$$u = (-1)^i \cdot U \quad \text{kde } i \in \{1, 2\} \text{ a } U = \text{konšt. je veľkosť impulzu.} \quad (2)$$

alebo $u = 0$



Obr.1. Bloková schéma zapojenia riadenej sústavy so ŠMI

Diferenciálna rovnica opisujúca systém v stavovom priestore je v tvare:

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d\underline{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \quad (3)$$

Riešenie tejto diferenciálnej rovnice je:

$$\underline{x} = \underline{A}(t) \cdot \underline{x}(0) + \underline{b}(t) \cdot u \quad (4)$$

$$\text{kde: } \underline{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \quad (5)$$

Úpravou rovníc (vylúčením času) získame opis systému vo fázovej rovine:

$$\underline{x}^2 - \underline{x}(0)^2 = 2 \cdot u \cdot (x - x(0)) \quad (6)$$

Trajektória, ktorá smeruje do počiatku a prechádza ním sa nazýva optimálna prepínacia krivka (OPK).

$$F(x) = 2 \cdot U_{OPK} \cdot x - \underline{x}^2 = 0 \quad (7)$$

kde U_{OPK} je riadiaca veličina, pre ktorú platí:

$$\begin{array}{ll} x \geq 0 & U_{OPK} = U \\ x < 0 & \text{potom } U_{OPK} = -U \end{array} \quad (8)$$

Z opisu vo fázovej rovine pre OPK hľadáme počiatočný stav $\underline{x}(0)$ pre konečný stav, ktorý je totožný s počiatkom $[0, 0]^T$. V maticovom tvare:

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2 \\ -t \end{pmatrix} \cdot u = \underline{b}(-t) \cdot u \quad (9)$$

Cieľom diskretného riadenia je rovnako ako pri spojitom riadení dosiahnuť ustálený stav v čo najkratšom čase. Na rozdiel od spojitých systémov riadiaci systém dostáva informáciu o skutočnom stave len v okamihoch vzorkovania a podľa toho treba nastaviť impulz U platný počas nasledujúcej periódy vzorkovania. Preto v prípade diskretného riadenia počítame šírku impulzu d , počas ktorej pôsobí riadiaci signál správnej polarít, čím zaistíme, že v okamihu vzorkovania dosiahneme OPK. Pri formulovaní a riešení tohto problému je výhodné zaviesť okrem OPK ešte dve prepínacie krivky: nulovú prepínaciu krivku (NPK) a posunutú prepínaciu krivku (PPK). Nulová prepínacia krivka je geometrické miesto stavov systému, z ktorého zastupujúci bod dosiahne OPK počas jednej periódy vzorkovania T pri pôsobení nulového riadiaceho signálu. Posunutá prepínacia krivka je geometrické miesto stavov systému, z ktorého zastupujúci bod dosiahne OPK počas jednej periódy vzorkovania T pri pôsobení riadiaceho signálu $-U_{OPK}$ počas celej periódy vzorkovania. Opis systému diskretného riadenia so šírkovou moduláciou impulzov a vzťahov pre NPK a PPK je podľa (Huba a kol. 1998a) v tvare:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{n+1} &= \underline{A}(T) \cdot \underline{x}_n + \underline{A}(T - d_n T) \cdot \underline{b}(d_n T) \cdot U_n \\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \underline{x}_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ \underline{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T \cdot d_n - \frac{d_n^2}{2} \\ d_n \end{pmatrix} \cdot U_n \end{aligned} \quad (10)$$

$$G(x) = -2 \cdot U_{OPK} \cdot (x_n + T \cdot \underline{x}_n) + \underline{x}_n^2 = 0 \quad (11)$$

$$H(x) = \underline{x}_n^2 - 4 \cdot T \cdot U_{OPK} \cdot \underline{x}_n - 2 \cdot U_{OPK} \cdot x_n + 2 \cdot T^2 \cdot U_{OPK}^2 = 0 \quad (12)$$

3 DISKRÉTNÉ RIADENIE SO ŠÍRKOVOU MODULÁCIOU IMPULZOV S PREDPÍSANOU ZMENOU POLOHY A RÝCHLOSTI

Požadujeme, aby vzdialenosť v n -tom kroku vzorkovania bola I_1 -krát a rýchlosť I_2 -krát menšia ako v predchádzajúcom kroku. Podmienky môžeme zapísať:

$$l_{n+1} = I_1 \cdot l_n \quad (13)$$

$$\underline{x}_{n+1} = I_2 \cdot \underline{x}_n \quad (14)$$

Spojením vzťahu (14) a (10) dostávame:

$$d_n = -\frac{1-I_2}{U_n} \cdot \mathfrak{x}_n \quad (15)$$

Opätovným dosadením do prvej z rovníc (10) máme:

$$x_{n+1} = x_n + I_2 T \mathfrak{x}_n - \frac{(I_2 - 1)^2}{2U_n} \mathfrak{x}_n^2 \quad (16)$$

Predpokladajme, že táto trajektória s uvažovaním I_2 má na poslednom úseku rovnicu paraboly v tvare:

$$x_n = a \cdot \mathfrak{x}_n + b \cdot \mathfrak{x}_n^2 \quad (17)$$

$$\text{resp. } x_{n+1} = a \cdot \mathfrak{x}_{n+1} + b \cdot \mathfrak{x}_{n+1}^2 \quad (18)$$

Koeficienty a, b získame spojením vzťahov (10), (16) a (18) s uvažovaním (15):

$$x_{n+1} = a \mathfrak{x}_{n+1} + b \mathfrak{x}_{n+1}^2 = a(\mathfrak{x}_n + d_n U_n) + b(\mathfrak{x}_n + d_n U_n)^2 \quad (19)$$

Porovnaním rovníc (17) a (19), dostávame hodnoty parametrov a, b:

$$a = \frac{I_2 T}{I_2 - 1} \quad (20)$$

$$b = \frac{1 - I_2}{2U_n(1 + I_2)} \quad (21)$$

Tým získame rovnicu OPK¹ na poslednom intervale:

$$x = \frac{I_2 T}{(I_2 - 1)} \mathfrak{x} + \frac{(1 - I_2)}{2U_{opk}(1 + I_2)} \mathfrak{x}^2 \quad (22)$$

Pre predchádzajúci úsek OPK² platí $d_n \in \langle 0, T \rangle$ a teda aj podľa (15):

$$0 \leq \frac{I_2 - 1}{U_n} \mathfrak{x}_n \leq T \quad (23)$$

Hraničný bod $X_A = [x_A, \mathfrak{x}_A]$ pre periódu vzorkovania T ($d_n = T$) má súradnice:

$$\mathfrak{x}_A = \frac{TU_{opk}}{I_2 - 1} \quad (24)$$

$$x_A = T^2 U_{opk} \frac{2I_2^2 + I_2 + 1}{2(1 - I_2)^2 (1 - I_2^2)} \quad (25)$$

Týmto hraničným bodom prechádza aj krivka OPK², ktorej rovnicu predpokladáme podľa všeobecného tvaru (6) v tvare:

$$\mathfrak{x}_A^2 - 2U_{opk} x_A + c = 0 \quad (26)$$

Pretože platí (24) a (25), vieme určiť koeficient c:

$$c = U_{opk} T^2 \frac{2I_2^2 + I_2 + 1}{(1 - I_2)^2(1 + I_2)} = U_{opk}^2 T^2 \frac{2I_2^2}{(1 - I_2)^2(1 + I_2)} \quad (27)$$

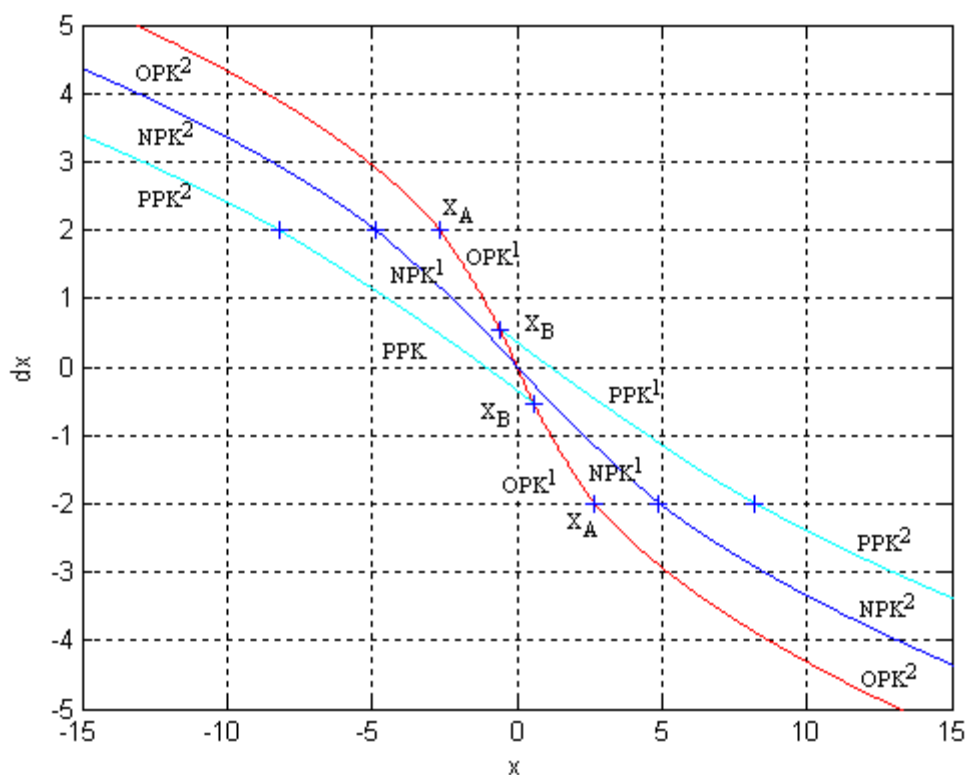
Potom OPK^2 má tvar:

$$x = \frac{\&^2}{2U_{opk}} + \frac{T^2 U_{opk} I_2^2}{(1 - I_2)^2(1 + I_2)} \quad (28)$$

Analogickým postupom zistíme NPK^1 a NPK^2 :

$$x = \left(a - \frac{T}{1 - I_1} \right) \& + b \&^2 \quad (29)$$

$$x = \frac{\&^2 - c}{2U_{opk}} - \frac{T\&}{1 - I_1} \quad (30)$$



Obr.2. Fázové trajektórie OPK, NPK, PPK pre $T=1$, $u = \pm 1$, $I_1 = 0.1$ a $I_2 = 0.5$

respektíve PPK^1 a PPK^2 :

$$x = a\& + b\&^2 - \frac{T\&}{1-I_1} + \frac{T^2U_{opk}}{2(1-I_1)} \quad (31)$$

$$x = \frac{T^2U_{opk}}{2(1-I_1)} - \frac{T\&}{(1-I_1)} + \frac{\&^2 - c}{2U_{opk}} \quad (32)$$

4 URČENIE ŠÍRKY IMPULZU A ALGORITMU RIADENIA

Pre vzdialenosť l_n platí:

$$l_n = x_n - x_{opk,n} \quad (33)$$

Šírku impulzu d_n musíme vypočítať pre štyri oblasti:

OPK¹ a NPK¹, OPK² a NPK², NPK¹ a PPK¹, NPK² a PPK².

Ak sa zastupujúci bod nachádza medzi krivkami OPK¹ a NPK¹, potom $U_n=U_{opk}$. Pre šírku impulzu d_n platí vzťah:

$$d_n = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1} \quad (34)$$

kde:

$$a_1 = \frac{1}{1+I_2} U_{opk} \quad (35)$$

$$b_1 = \frac{1-I_2}{1+I_2} \&_n - \frac{T}{1-I_2} U_{opk} \quad (36)$$

$$c_1 = \frac{(1-I_1)(1-I_2)}{1+I_2} \frac{\&_n^2}{2U_{opk}} - \frac{1-I_1I_2}{1-I_2} T\&_n - (1-I_1)x_n \quad (37)$$

V prípade, že zastupujúci bod sa nachádza medzi krivkami NPK¹ a PPK¹, tak $U_n=-U_{opk}$. Pre šírku impulzu opäť platí vzťah (34) a koeficienty sú dané vzťahmi:

$$a_1 = -\frac{1}{1+I_2} U_{opk} \quad (38)$$

$$b_1 = -\frac{1-I_2}{1+I_2} \&_n + \frac{T}{1-I_2} U_{opk} \quad (39)$$

$$c_1 = \frac{(1-I_1)(1-I_2)}{1+I_2} \frac{\&_n^2}{2U_{opk}} - \frac{1-I_1I_2}{1-I_2} T\&_n - (1-I_1)x_n \quad (40)$$

Podobne platí aj:

$$x_{n+1} - l_{n+1} = \frac{\mathfrak{E}_{n+1}^2}{2U_{opk}} + \frac{I_2^2 T^2 U_{opk}}{(1-I_2)^2(1+I_2)} \quad (41)$$

Spojením rovníc (13), (40) a (10) získame kvadratickú rovnicu:

$$\begin{aligned} \frac{U_n}{2} \left(\frac{U_n}{U_{opk}} + 1 \right) d_n^2 + \left(\frac{U_n}{U_{opk}} \mathfrak{E}_n - TU_n \right) d_n + (1-I_1) \frac{\mathfrak{E}_n^2}{2U_{opk}} - T\mathfrak{E}_n + (1-I_1)x_n + \\ + \frac{(1-I_1)I_2^2}{(1-I_2)^2(1+I_2)} T^2 U_{opk} = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Ak sa zastupujúci bod nachádza medzi krivkami OPK² a NPK², potom U_n=U_{opk}. Pre šírku impulzu d_n platí vzťah

$$d_n = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2} \quad (43)$$

kde:

$$a_2 = U_{opk} \quad (44)$$

$$b_2 = -TU_{opk} + \mathfrak{E}_n \quad (45)$$

$$c_2 = (1-I_1) \frac{\mathfrak{E}_n^2}{2U_{opk}} - T\mathfrak{E}_n - (1-I_1)x_n + \frac{(1-I_1)I_2^2}{(1-I_2)^2(1+I_2)} T^2 U_{opk} \quad (46)$$

Ak sa zastupujúci bod nachádza medzi krivkami NPK² a PPK², tak U_n=-U_{opk}. Pre šírku impulzu d_n platí vzťah (43) s koeficientmi:

$$a_2 = 0 \quad (47)$$

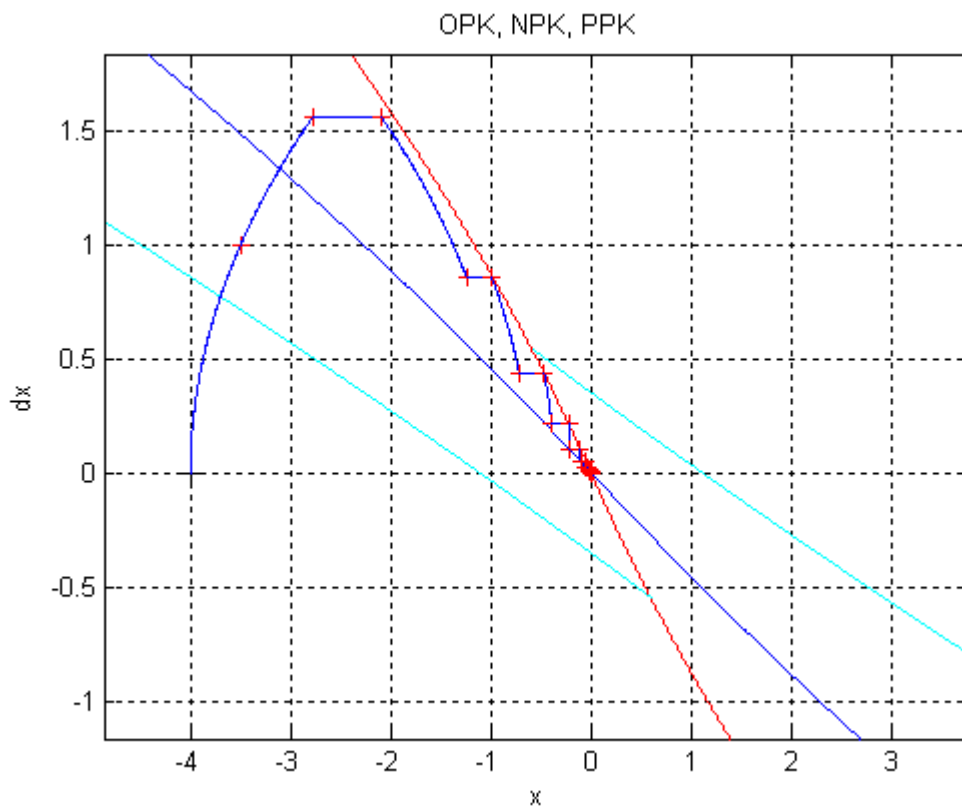
$$b_2 = TU_{opk} - \mathfrak{E}_n \quad (48)$$

$$c_2 = (1-I_1) \frac{\mathfrak{E}_n^2}{2U_{opk}} - T\mathfrak{E}_n - (1-I_1)x_n + \frac{(1-I_1)I_2^2}{(1-I_2)^2(1+I_2)} T^2 U_{opk} \quad (49)$$

Mimo kriviek OPK a PPK platí: d_n = T , U_n = -U_{opk} .

5 SIMULÁCIA RIADENIA PROCESU

Na nasledujúcom obrázku je zobrazená simulácia riadenia procesu so šírkovou moduláciou s predpísanou zmenou polohy a rýchlosti podľa vyššie uvedeného algoritmu.



Obr.3. Fázový portrét pre počiatočný stav v $[-4, 0]^T$, $T=1$, $U=\pm 1$ a $I_1 = 0.1$ a $I_2 = 0.5$

6 ZÁVER

V príspevku sú analyzované a navrhnuté algoritmy riadenia so šírkovou moduláciou impulzov pre rýdzoastatickú sústavu druhého rádu s predpísanou zmenou polohy a rýchlosti. Akčnú veličinu sme uvažovali symetricky šírkovo modulovanú. Na dobu výpočtu, resp. simulácie má vplyv aj dĺžka periódy vzorkovania. Pri voľbe veľmi krátkej doby sa riadenie zbytočne predlžuje. Uvedené algoritmy riadenia so šírkovou moduláciou impulzov sú vhodné na použitie kompenzácie pri sústavách s dopravným oneskorením. Úmyselné brzdenie systému, predstavujúce zavedené parametre I_1 a I_2 , zabráňuje možnému vzniku preregovania vplyvom dopravného oneskorenia. Takto navrhnutý algoritmus je potom suboptimálny pre dosiahnutie žiadaného stavu, ktorým je počiatočný súradnicový systém. Na druhej strane uvedené algoritmy sú pomerne zložito matematicky opísané, čím dobou výpočtu sami zavádzame dopravné oneskorenie. Avšak aj napriek tomu sa dá predpokladať, že na základe vysokej rýchlosti súčasnej výpočtovej techniky budú môcť byť tieto algoritmy úspešne realizovateľné v reálnych systémoch.

7 LITERATÚRA

- Huba, M., Sovišová, D., Božgai, B., Bisták, P., Žáková, K. (1998a). Minimum Time Pole Assignment PWM Controllers for I_1 - and I_2 - Systems. *EMCSR98 Wien*, pp.26-31.
- Huba, M. (1998). Minimum Time Pole Assignment Controller for Constrained 2nd Order Systems. *SSC98 Nantes*, pp.481-486.
- Huba, M., Sovišová, D., Oravec, I. (1998b). Minimum Time Pole Assignment PWM PD- Controller. *Process Control'98 Kouty nad Desnou, Czech Republic*, pp.171-174.
- Huba, M., Sovišová, D., Oravec, I. (1998). Invariant Sets based Concept of the Pole Assignment Control, European Control Conference ECC'99, Karlsruhe, Germany.
- Feldbaum A.A., "Optimal control systems", Academic Press, N.York. (1965).
- Desoer C.A., Wing J., "The minimal time regulator problem for linear sampled-data systems: General theory", *J. Franklin Inst.*, 272, 208-228, (1961).