Journal of Cybernetics and Informatics

published by

Slovak Society for Cybernetics and Informatics

Special Issue
"New Trends in Education of Automation and Information Technology"
2004

IDENTIFIKACE A PREDIKTIVNÍ ŘÍZENÍ ARX MODELU MINIMALIZACÍ p NORMY
Štecha J., Pekař J., 42-49

http://www.sski.sk/casopis/index.php (home page)

ISSN: 1336-4774

IDENTIFIKACE A PREDIKTIVNÍ ŘÍZENÍ ARX MODELU MINIMALIZACÍ p NORMY

Štecha Jan, Pekař Jaroslav

Katedra řídicí techniky
Elektrotechnická fakulta
České vysoké učení technické v Praze
Karlovo náměstí 13, 121 35 Praha 2, Česká Republika
E-mail: stecha@control.felk.cvut.cz

***Abstract**: Identifikace parametrů systému ze změřených dat se obvykle řeší minimalizací kvadratické normy soustavy rovnic systému. Tento postup je známý jako metoda nejmenších čtverců (LS), případně totálních nejmenších čtverců (TLS) a nebo jako kombinace obou metod (mixed LS and TLS). Je známo, že použití p normy* $(1 \leq p < 2)$ *potlačuje chybná data (outliers). Tomuto jevu je věnován tento příspěvek.*
Použití minimalizace p normy kritéria při prediktivním řízení vede na zajímavé výsledky.

***Keywords**: Identifikace, Prediktivní řízení, p-norma, ARX model, Lineární Programování*

1 ÚVOD

Experimentální identifikace dynamických vlastností reálných soustav se obvykle řeší volbou struktury jejího modelu a odhadováním neznámých parametrů modelu pomocí vstupních a výstupních dat měřených na reálné soustavě [1].

Jedním ze dvou záměrů tohoto příspěvku je porovnat výsledky estimace parametrů ARX modelu získané minimalizaci p normy, kde $(1 \leq p \leq 2)$. Přitom měřené hodnoty výstupu systému jsou porušeny několika špatnými měřeními (outliery).

Druhá část příspěvku je věnována problémům optimálního řízení systému a to speciálně prediktivnímu řízení (MPC - Model Predictive Control) [2, 3]. Kvadraticky optimální prediktivní řízení ARX modelu nebo stavového modelu se přirozeně získá minimalizací kvadratického kritéria. Optimální prediktivní strategii řízení můžeme také získat minimalizací p normy regulační odchylky a vstupního signálu. To vede na zajímavé strategie řízení a pro normu $p \rightarrow 1$ dostaneme řízení s konečným počtem kroků řízení (dead beat control). Minimalizaci l_1 normy je možno řešit lineárním programováním, viz například [4, 5, 6]). Použití metody lineárního programování pro řešení problému optimálního řízení je uvedeno v [7, 8]. V tomto příspěvku ukážeme výsledky simulací optimálního prediktivního získaného minimalizací p normy kritéria.

Příspěvek je organizován následujícím způsobem: Ve druhé části příspěvku je formulován problém identifikace ARX modelu úžitím p-normy. Třetí část je věnována popisu algoritmu minimalizace p-normy, kde $1 < p < 2$. Tento algoritmus je znám jako iterativní vážené nejmenší čtverce (Iteratively Reweighed Least Squares (IRLS)). Čtvrtá část je věnována prediktivní strategii řízení pro stavový model systému. V části 5 a 6 jsou prezentovány výsledky identifikace a řízení užitím p-normy.

2 IDENTIFIKACE ARX MODELU UŽITÍM p-NORMY

Obvyklá struktura ARX modelu diskrétního systému s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou je následující

$$y(t) = a_1 y(t-1) + \ldots + a_{n-1} y(t-n-1) + b_0 u(t) + \ldots + b_{n-1} u(t-n-1) + e(t) \tag{1}$$

kde $y(t)$ je výstup systému v čase t a $u(t)$ je vstup systému, $e(t)$ je chyba rovnice a a_i, b_j jsou parametry systému.

Problém estimace parametrů systému z dané množiny dat $\mathcal{D}^t = \{y(t), y(t-1), \ldots, u(t), u(t-1), \ldots\}$ vede na minimalizaci vektoru chyb $\varepsilon = [e(t), e(t-1), \ldots]^T$.

Hledáme tedy vektor parametrů $x = [a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, \ldots]^T$ který zajistí nejlepší aproximaci výstupního vektoru $y = [y(t), y(t-1), \ldots, y(t-m-1)]^T$ pomocí vektoru Ax, kde

$$A = \begin{bmatrix} y(t-1) & y(t-2) & \ldots & u(t) & \ldots \\ y(t-2) & y(t-3) & \ldots & u(t-1) & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{2}$$

Vektor výstupů y a matice A jsou tvořeny měřenými daty $\mathcal{D}^t$.

Nejobvyklejší řešení tohoto problému je minimalizace kvadratické normy vektoru chyb

$$\min_x \|Ax - b\|_2 . \tag{3}$$

Řešení je známé jako nejmenší čtverce (Least Squares (LS)) [9]. Je ale zřejmé, že výstupní šum je také v prvcích matice dat A. Řešení takového problému vede na úplné nejmenší čtverce (Total Least Squares (TLS)) [10]. Je-li měření vstupního signálu bez chyby, pak takový problém můžeme řešit kombinací obou metod (Mixed LS and TLS) [10].

Někdy lze užít obecnou p normu místo normy kvadratické [9, 11]. p norma je definována

$$\|y\|_p = \left(|y_1|^p + \ldots + |y_n|^p\right)^{1/p} , \quad 1 \leq p \leq \infty . \tag{4}$$

Pak náš problém je následující

$$x^* = \arg\min_x \|Ax - b\|_p^p . \tag{5}$$

Pro $1 < p \leq 2$ minimalizaci p normy lze řešit pomocí iterativního řešení vážených nejmenších čtverců. Pro $p = 1$ problém řešíme lineárním programováním.

3 MINIMALIZACE p-NORMY

p normu získáme řešením následujícího optimalizačního problému

$$\min_x \|Ax - b\|_p . \tag{6}$$

Je-li p norma v intervalu $1 < p < 2$ minimalizační problém je konvexní a řešení je jednoznačné. Pro řešení lze použít iterativní algoritmus známý jako Iterativní vážené nejmenší čtverce (Iteratively Reweighted Least Squares (IRLS)) [9].

3.1 Iterativní vážené nejmenší čtverce

Mějme následující aproximační problém

$$\min_x \left\{\Psi(x) = \|Ax - b\|_p^p\right\} \qquad 1 < p < 2 . \tag{7}$$

Předpokládejme, že všechny souřadnice residua $\varepsilon(x) = b - Ax$ jsou nenulové. Pak funkce $\Psi(x)$ může být definována jako

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{m} |\varepsilon_i(x)|^p = \sum_{i=1}^{m} |\varepsilon_i(x)|^{p-2} \varepsilon_i(x)^2 . \tag{8}$$

Předchozí problém jsou vážené nejmenší čtverce:

$$\min_x \left\|D(\varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} (b - Ax)\right\|_2 , \qquad D(\varepsilon) = \mathrm{diag}(|\varepsilon|) . \tag{9}$$

Protože diagonální váhová matice $D(\varepsilon)$ závisí na neznámém řešení x je třeba řešit problém iteračním algoritmem. Vstup do k-té iterace je

$$\varepsilon^{(k)} = b - Ax^{(k)}, \qquad D^{(k)} = \mathrm{diag}\left(\left|\varepsilon^{(k)}\right|^{\frac{p-2}{2}}\right) \tag{10}$$

Užitím algoritmu vážených nejmenších čtverců získáme $\delta x^{(k)}$ řešením

$$\delta x^{(k)} = \arg\min_{\delta \mathrm{x}} \left\|D^{(k)}\left(\varepsilon^{(k)} - A\delta x\right)\right\|_2 \tag{11}$$

Další iterace $\mathbf{x}^{(k+1)}$ je rovna

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \delta x^{(k)} . \tag{12}$$

Pro minimalizaci normy $p = 1$ lze užít lineární programování (LP). Dva následující problémy jsou ekvivalentní

$$\begin{aligned} &\min_x \|Ax - b\|_1 \quad \Longleftrightarrow \\ &\min_y \left\{ 1^T y \ : \ Ax - b \le y, \ Ax - b \ge -y \right\} \end{aligned} \tag{13}$$

Zavedením rozšířeného vektoru $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, získáme standarndní tvar problému LP

$$\min_z \left\{ c^T z \ : \ \bar{A} z \le \bar{b} \right\}, \tag{14}$$

$$c^T = \left[\ 0, \quad \ldots \quad 0, \quad 1, \quad \ldots \quad 1 \ \right]$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & -I \\ -A & -I \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$

Jediná nevýhoda tohoto přístupu spočívá v tom, že obecně problém LP může mít více řešení.

4 PREDIKTIVNÍ STRATEGIE ŘÍZENÍ

Stavové rovnice diskrétního modelu

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + v(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t). \end{aligned} \tag{15}$$

kde $x(t)$, $y(t)$ a $u(t)$ jsou v pořadí stav, výstup a vstup systému a A, B, C and D jsou matice odpovídajících dimenzí. $v(t)$ a $e(t)$ jsou šumy stavu měření výstupu s nulovou střední hodnotou a kovariancí R_v a R_e, které jsou nezávislé na stavu a vstupním signálu procesu.

Pro optimální prediktivní strategii je kritériem kvality řízení kvadratická forma

$$J = \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=1}^{K} (y(t) - w(t))^2 + r(u(t))^2 \mid x(1) \right\} \tag{16}$$

kde K je časový horizont prediktivní strategie řízení, $w(t)$ je reference a r je váhový koeficient. Zavedeme rozšířené vektory $Y = [y(1), \ldots, y(K)]^T$, $W = [w(1), \ldots, w(K)]^T$, $U = [u(1), \ldots, u(K)]^T$, $V = [v(1), \ldots, v(K)]^T$, $E = [e(1), \ldots, e(K)]^T$ a rozšířené matice $P = \left[C^T, A^T C^T, \ldots, (A^T)^{K-1} C^T\right]^T$,

$$S = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{K-2}B & CA^{K-3} & \cdots & D \end{bmatrix},$$

a

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{K-2} & CA^{K-3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Pak lze kritérium vyjádřit ve tvaru

$$J = \mathcal{E} \left\{ (Y - W)^T (Y - W) + rU^T U \mid x(1) \right\}, \tag{17}$$

kde rozšířený vektor $Y = Px(1) + SU + QV + E$. Minimalizaci kritéria lze provést doplněním na úplný čtverec. Výsledkem je optimální řízení

$$U^* = -\left(S^T S + rI\right)^{-1} S^T \left(Px(1) - W\right) \tag{18}$$

Stavový a výstupní šum pouze zvětšují optimální hodnotu kritéria.

Často uvažujeme pouze diference vstupního signálu. Kritérium má potom tvar

$$J = \mathcal{E}\left\{\sum_{t=1}^{K}(y(t)-w(t))^2 + r(\Delta u(t))^2 \mid x(1)\right\} \tag{19}$$

kde $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$. Optimální prediktivní strategie řízení je v tomto případě

$$U^* = -\left(S^T S + rI\right)^{-1} S^T \left[(Px(1) - W) - rR^T U(0)\right] \tag{20}$$

kde $U(0) = [u(0), 0, \dots 0]^T$ a matice R je rovna

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Výsledné optimální řízení má pak integrační charakter.

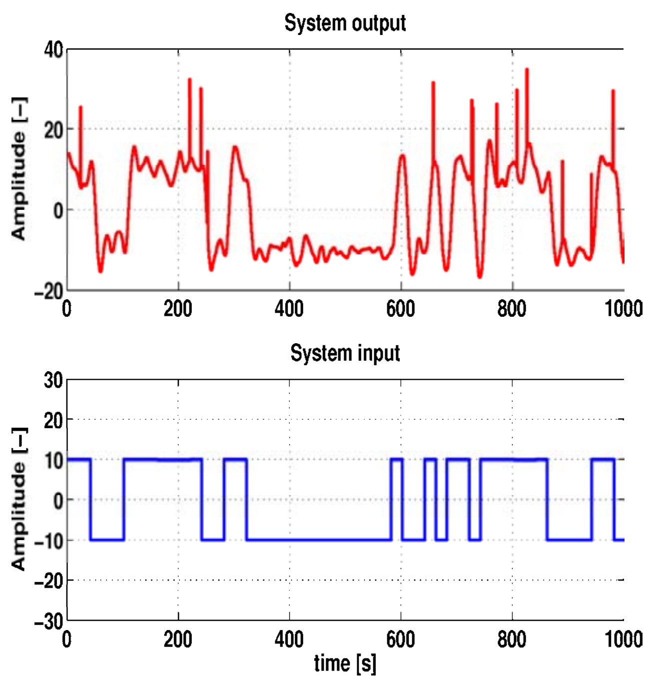
Také pro prediktivní řízení lze použít různé normy kritéria kvality řízení

$$J = \sum_{k-\nu-1}^{k} |y(i) - w(i)|_p^p + r\,|\Delta u(i)|_p^p \tag{21}$$

Podle váhového koeficientu r kvadratická norma potlačuje velké regulační odchylky a velké řídicí signály. Jestliže norma $p < 2$ pak malé členy v kritériu mají větší vliv a jestliže $p \to 1$ zákon řízení se blíží konečnému počtu kroků (dead beat control).

5 PŘÍKLAD - POTLAČENÍ CHYB MĚŘENÍ MINIMALIZACÍ p NORMY

Simulační experiment ukazuje vliv chybných měření na výsledek identifikace parametrů systému při užití různých norem.



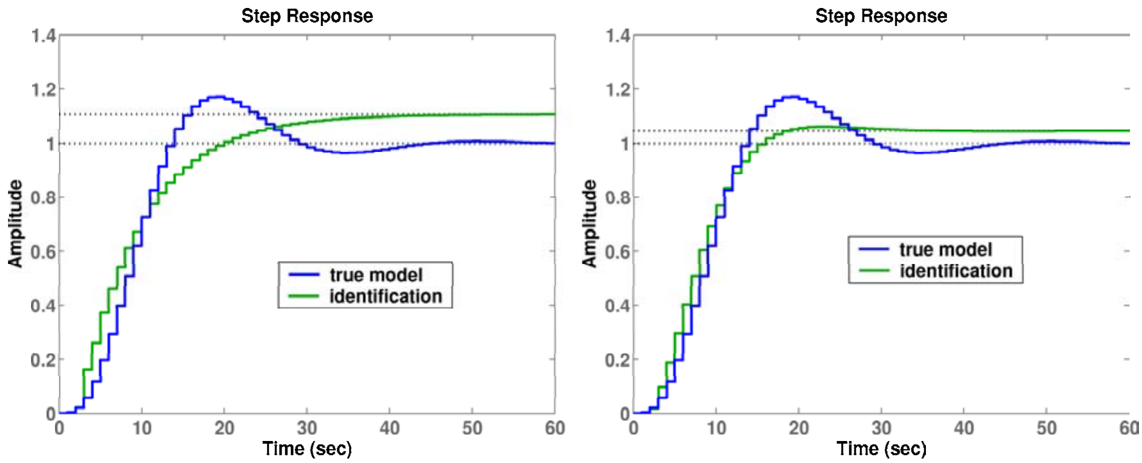
Obrázek 1: Vstupní a výstupní data.

Uvažujme tedy diskrétní systém popsaný přenosovou funkcí (ARX model)

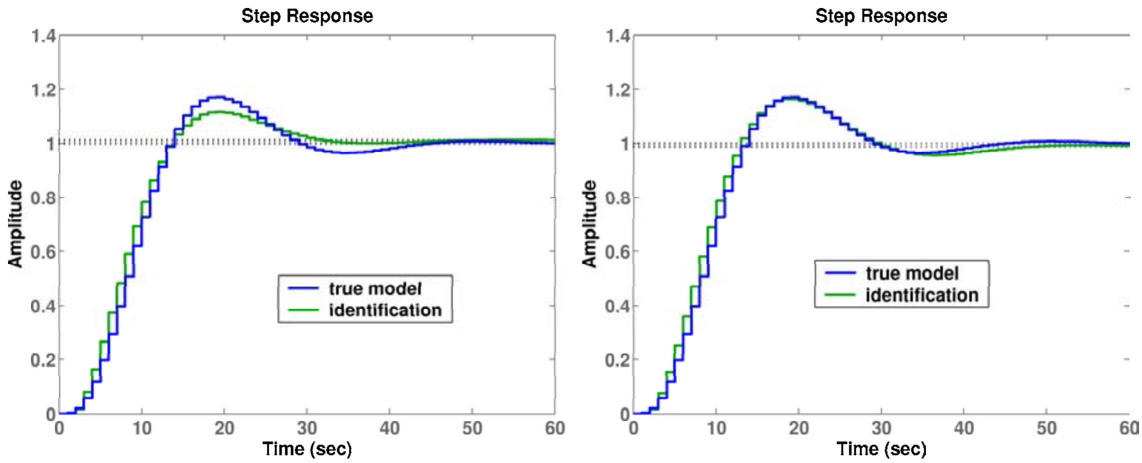
$$Y(z) = \frac{0.002870z^2 + 0.009882z + 0.002126}{z^3 - 2.444z^2 + 2.008z - 0.5488} U(z) + \frac{1}{z^3 - 2.444z^2 + 2.008z - 0.5488} E(z)\,. \tag{22}$$

Užitím tohoto modelu byla generována data pro náš experiment. V obr.1 jsou vstupní a výstupní trajektorie systému. Je vygenerováno 1000 vzorků vstupních a výstupních dat a pouze 10 vzorků výstupu obsahuje úplně špatná měření (outliery).

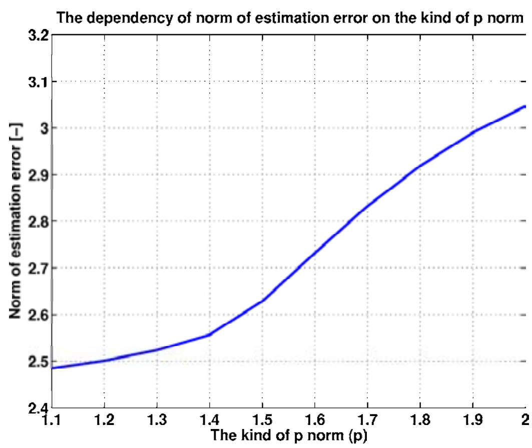
Dva obr. 2 a 3 ukazují odezvy na skok identifikovaného modelu, přičemž identifikace byla realizována užitím různých norem.



Obrázek 2: Výsledky identifikace - odezvy na skok (levý pro $p = 2$, pravý $p = 1.7$).



Obrázek 3: Výsledky identifikace - odezvy na skok (levý pro $p = 1.3$, pravý $p = 1.1$.



Obrázek 4: Závislost normy chyby estimace na p normě kritéria minimalizace.

Euclidova norma chyby parametrů estimace ukazuje přesnost estimace. Norma je rovna

$$J = \|x^* - x\|_2 \tag{23}$$

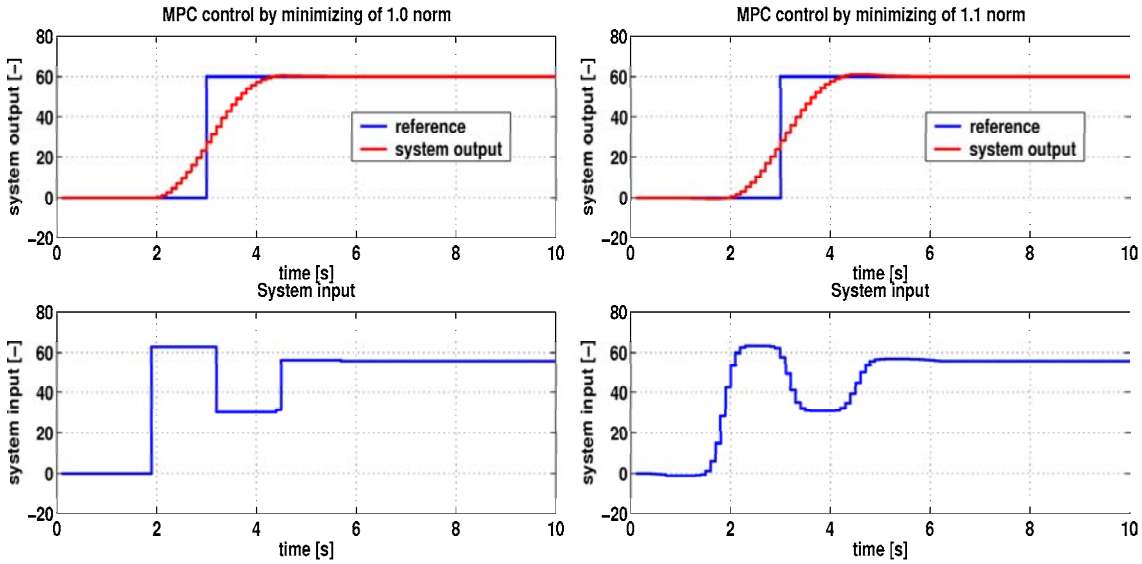
kde $\mathbf{x}^*$ je vektor odhadu parametrů a $\mathbf{x}$ je vektor skutečných parametrů. Obr.4 ukazuje závislost normy chyby estimace na použité p normě minimalizace.

6 PŘÍKLAD - PREDIKTIVNÍ ŘÍZENÍ PŘI MINIMALIZACI p NORMY KRITÉRIA

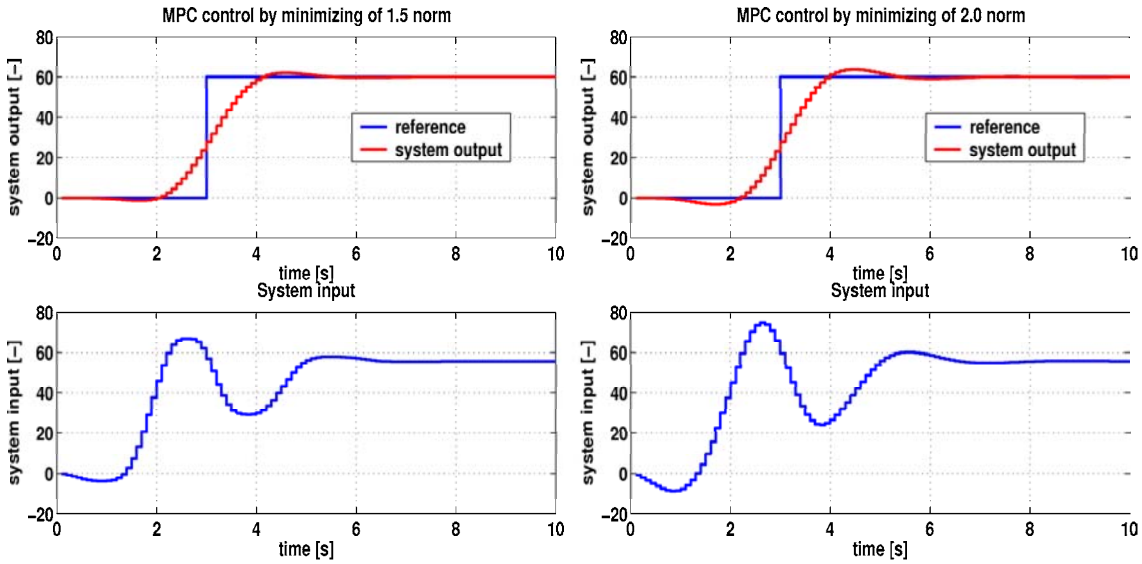
Pro experiment byl použit systém druhého řádu popsaný přenosem

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.7s + 0.93} \tag{24}$$

Systém byl diskretizován s periodou vzorkování $T_s = 0.1s$.



Obrázek 5: Výsledky simulace pro 1 (levý) a 1.1 (pravý) normu (s váhovým koeficientem $r = 1$).



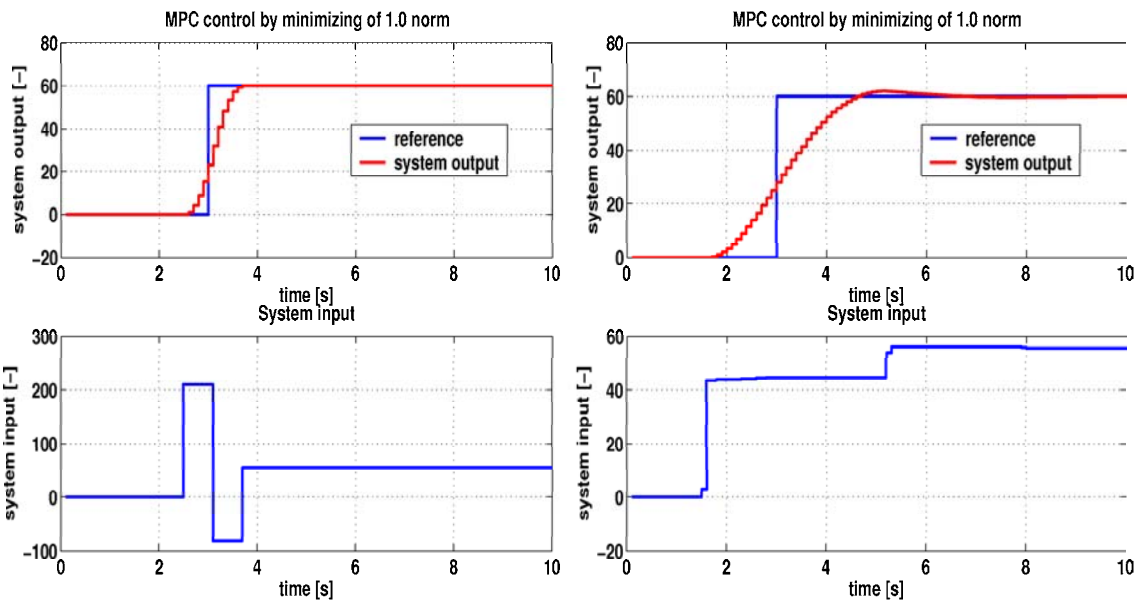
Obrázek 6: Výsledky simulace pro 1.5 (levý) a 2 (pravý) normu (s váhovým koeficientem $r = 1$).

V prvním experimentu byly navrženy tři prediktivní regulátory (MPC):

- První MPC získáme minimalizací 1 normy. Tento problém je řešen lineárním programováním.
- Druhý MPC získáme minimalizací p normy, kde p je v intervalu $1 < p < 2$. V tomto případě minimalizační problém je řešen iterativním algoritmem - iterativní vážené nejmenší čtverce.
- Ve třetím případě standardní MPC regulátor je získaný minimalizací kritéria ve tvaru kvadratické normy. Tento optimalizační problém můžeme řešit jako nejmenší čtverce (LS), případně kvadratickým programováním (QP) při omezení řídicích veličin.

Jediná změna v předchozích obrázcích je druh p-normy. Všechny ostatní parametry jsou nezměněny (horizont predikce $N = 4s$ a váhový koeficient $r = 1$). Následující obrázky obr.5 a obr.6 ukazují výsledky simulace. Pro všechny použité p-normy je zobrazeno sledování reference a vstup systému. Při minimalizaci $p = 1$ normy kritéria kvality dostaneme řízení s konečným počtem kroků.

V druhém experimentu je ukázán vliv váhového koeficientu r v kritériu (21) na počet kroků řízení (time length of dead beat control) samozřejmě při použití $p = 1$-normy. V obr. 5 jsou výsledky simulace pro váhový koeficient $r = 1$ a v obr.7 pro $r = 0.1$ a $r = 10$. Relativně velká penalizace r nedovolí velké změny v diferenci řídicí veličiny Δu a proto počet kroků řízení je větší.



Obrázek 7: Výsledek simulace pro 1 normu při váhovém koeficientu $r = 0.1$ (levý) a $r = 10$ (pravý).

7 ZÁVĚR

Záměrem příspěvku je ukázat vliv různých p norem na identifikaci a řízení ARX modelu. Jestliže měření výstupu jsou ovlivněna velkými chybami, Euclidova norma dává horší výsledky než p norma pro $1 < p < 2$. Nejlepší výsledky jsou dosaženy při použití p normy pro p blížící se k 1.

Prediktivní řízení realizované minimalizací p normy kritéria kvality dává zajímavé výsledky, které leží mezi klasickým LQ řízením a řízením na konečný počet kroků.

Reference

[1] LJUNG, L. *System identification: Theory for the User.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.

[2] K. J. ÅSTRÖM , B. WITTENMARK *Computer Controlled Systems: Theory and design.* Prentice Hall,Inc, Upper Saddle River, NJ, 1997.

[3] R. FINDEISEN, L. IMSLAND, F. ALLGÖWER, B.A. FOSS. *State and Output Feedback Nonlinear Model Predictive Control: An Overview.* European Journal of Control, 9, (2003), 190-206.

[4] CHRISTOPHER V. RAO, JAMES B. RAWLINGS. *Linear programming and model predictive control.* Journal of Process Control, 10, 2000, 283-289.

[5] J.C. ALLWRIGHT, G.C. PAPAVASILIOU. *On linear programming and robust model predictive control using impulse response.* Sys. Cont. Let., 18, 1992, 159-164.

[6] H. GENCELI, M. NIKOLAU. *Robust stability analysis of constrained l_1-norm model predictive control.* AIChE J., 39 (12), 1993, 1954-1965.

[7] T.S. CHANGE, D.E. SEBORG *A linear programming approach for multivariable feedback control with inequality constraints.* Int. J. Control, 37, 1983, 583-597.

[8] L.A. ZADEH, J.H. WHALEN. *On optimal control and linear programming.* IRE Trans. Auto, Cont. 7, 1962, 45-46.

[9] Å. BJÖRCK. *Numerical Methods for Least Squares Problems.* Siam, Philadelphia, 1996.

[10] S.VAN HUFFEL, J. VANDEWALLE. *The Total Least Squares Problem. Computational Aspects and Analysis.* Siam, Philadelphia, 1991.

[11] S. BOYD, L. VANDENBERGHE L. *Introduction to Convex Optimization with Engineering Applications.* Lesture notes, Stanford University, 2002, (Available at: isl.stanford.edu/pub/boyd/)